

нансного преобразователя частоты с трансформаторной развязкой. Коэффициент полезного действия преобразователя составил не менее 97 %, что соответствует поставленной цели. Разработанная САУ, в условиях постоянно меняющихся параметров объекта, позволяет удерживать систему в резонансном режиме, что позволяет достигать максимальной активной мощности. При этом напряжение и ток на нагрузке имеют синусоидальную

форму без постоянной составляющей частотой до 100 кГц, что позволяет достичь наибольшего эффекта в снижении внутреннего градиента температуры кремниевых стержней (около 44 %) за счет скин-эффекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горюнов А.Г., Козин К.А., Сачков С.А. Влияние параметров тока пульсирующей формы на резистивный нагрев стержней siemens-реактора // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2010. – № 11/2. – С. 219–223.
2. Device and method for producing uniform temperature distribution in silicon rods during a precipitation process: Patent US 20090229991 A1, Pub. Date 17.09.2009. – 12 с.
3. Устройство равномерного нагрева поликристаллических кремниевых стержней. пат. № 121255 Рос. Федерация. № 2012119449; заявл. 11.05.2012; опубл. 20.10.2012, Бюл. № 29. – 4 с.
4. Кобзев А.В. Многозонная импульсная модуляция. Теория и применение в системах преобразования параметров электрической энергии. – Новосибирск: Наука, 1979. – 304 с.
5. Черкашин Ю. Расчет трансформаторов при произвольных законах изменения напряжения и тока // Силовая электроника. – 2009. – № 2. – С. 26–30.
6. Производство магнитомягких сплавов и ленты с аморфной и нанокристаллической структурой под торговой маркой ГАММАМЕТ // Официальный сайт научно-производственного предприятия ГАММАМЕТ. 2012. URL: <http://www.gammamet.ru> (дата обращения: 20.07.2012).
7. Железко Ю.С. Компенсация реактивной мощности и повышение качества электроэнергии. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 224 с.
8. Козин К.А., Горюнов А.Г., Сачков С.А. Синтез адаптивной системы управления нестационарным объектом – Siemens-реактором получения поликристаллического кремния // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 5. – С. 32–38.

Поступила 21.12.2012 г.

УДК 62–51

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

С.С. Михалевич, С.А. Байдали, И.П. Чучалин, В.А. Москалев

Томский политехнический университет

E-mail: mse@tpu.ru

Представлен математический аппарат, позволяющий моделировать методом пространства состояний линейные динамические системы, представляемые в виде произвольных комбинаций динамических звеньев, описанных в статье. Описан порядок моделирования системы автоматического управления методом пространства состояний. Представлен алгоритм выбора последовательности расчета блоков системы управления.

Ключевые слова:

Система автоматического управления, моделирование, пространство состояний, алгоритм.

Key words:

Control system, simulation, state space, algorithm.

Введение

На протяжении длительного времени в области автоматического управления уделяется большое внимание описанию динамических систем методами пространства состояний. Аналогичную тенденцию можно наблюдать и в других областях применения теории систем. Методы управления, основанные на частотном анализе, алгебре передаточных функций, преобразовании Лапласа и z -преобразовании, которые можно считать классическими, играют значительную роль в развитии и при-

менении теории управления и в родственных автоматизации областях. Вследствие их простоты и ясной связи с физической реальностью они, по-видимому, и в будущем сохраняют свое место среди современных методов описания динамических систем. Однако классические методы не могут сохранить свои позиции при решении задач многомерных и сложных систем, где они часто оказываются несостоятельными исключительно из-за вычислительных трудностей, тогда как методы пространства состояний позволяют осуществить четкую

формализацию и автоматизацию вычислительных процедур [1].

Из преимуществ метода пространства состояний следует отметить единую формулировку и возможность простого решения задач управления в многомерных системах, задач асинхронного и периодического квантования [2].

Описание систем в пространстве состояний позволяет обнаружить и исследовать такие свойства, которые при использовании классических методов частотного анализа и описания в терминах «вход–выход» остались бы скрытыми. Матричная форма записи, применяемая в методе пространства состояний, имеет неоспоримое преимущество при численном решении, а ясность математических формулировок и самих решений не ухудшается даже для многомерных систем, описывающих поведение сложных производственных комплексов [3].

В статье представлен математический аппарат метода пространства состояний, его связь с «классическим» представлением звеньев в виде дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта, а также общий алгоритм последовательности расчета звеньев системы автоматического управления.

Метод пространства состояний позволяет представлять систему управления в виде системы уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \\ y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор состояния; $y(t)$ – вектор выхода; $u(t)$ – вектор управления; $A(t)$ – матрица системы; $B(t)$ – матрица управления; $C(t)$ – матрица выхода; $D(t)$ – матрица прямой связи.

Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами, одним входом и одним выходом, представляемую в виде [4, 5]:

$$(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0)y = (\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0)u, \quad (2)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Матрицы A, B, C, D уравнения (1) определяются из выражений:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ D &= b_0 = \beta_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Приведенные уравнения состояния (3) соответствуют так называемому стандартному виду системы [1].

Зачастую составляющие систему управления объекты представлены в виде динамических звеньев, описываемых дифференциальными уравнениями или передаточными функциями, содержащими запаздывание.

На практике звено, содержащее запаздывание, можно разделить на два: звено запаздывания и звено, описываемое дифференциальным уравнением или передаточной функцией без запаздывания. Для расчета звена запаздывания можно использовать аппроксимацию Паде и решать данное звено как передаточную функцию без запаздывания.

Соединение звеньев системы

В зависимости от способа получения требуемых характеристик и технической реализации, звенья, из которых состоит система, могут быть соединены в различные комбинации. Самым употребляемым и широко известным методом представления системы управления является представление в виде структурной схемы, представляющей собой графическое отображение математической модели. В любой структурной схеме всегда можно выделить три типовых соединения звеньев: параллельное; последовательное; соединение с обратной связью. В отличие от соединения с обратной связью, параллельное и последовательное соединения звеньев подробно рассмотрены в литературе [6].

Параллельное соединение подсистем S_i ($i=1,2$) описывается уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i(t) \cdot x_i(t) + B_i(t) \cdot u_i(t), \\ y_i(t) = C_i(t) \cdot x_i(t) + D_i(t) \cdot u_i(t). \end{cases}$$

Матрицы $A_i(t), B_i(t), C_i(t)$ имеют размеры, соответственно, $n_i \times n_i, n_i \times m_i, l_i \times m_i$. Тогда при объединении систем S_1 и S_2 в общее уравнение (1) получим [6]:

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} A_2(t) & 0_{n_2 \times n_1} \\ 0_{n_1 \times n_2} & A_1(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_2(t) & 0_{n_2 \times m_1} \\ 0_{n_1 \times m_2} & B_1(t) \end{bmatrix}, \\ C(t) &= \begin{bmatrix} C_2(t) & 0_{l_2 \times n_1} \\ 0_{l_1 \times n_2} & C_1(t) \end{bmatrix}, \quad D(t) = D_1 + D_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Для реализации последовательного соединения подсистем рассмотрим систему S . Пусть входом системы S является вход подсистемы S_1 , $u(t) \equiv u_1(t)$; выход системы образуется выходом подсистемы S_2 , $y(t) \equiv y_2(t)$ и выход первой подсистемы S_1 поступает на вход подсистемы S_2 так, что их размерности совпадают, $l_1 = m_2$ и $u_2(t) = y_1(t)$ (размерности матриц $A_i(t), B_i(t), C_i(t)$ равны, соответственно, $n_i \times n_i, n_i \times m_i, l_i \times m_i$).

Тогда при сведении уравнений к общему уравнению состояния (1) получим [6]:

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} A_1(t) & 0_{n_1 \times n_2} \\ B_2(t) \cdot C_1(t) & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \cdot D_1(t) \end{bmatrix}, \\ C(t) &= [D_2(t) \cdot C_1(t) \quad C_2(t)], \quad D(t) = D_1(t) \cdot D_2(t). \end{aligned} \quad (5)$$

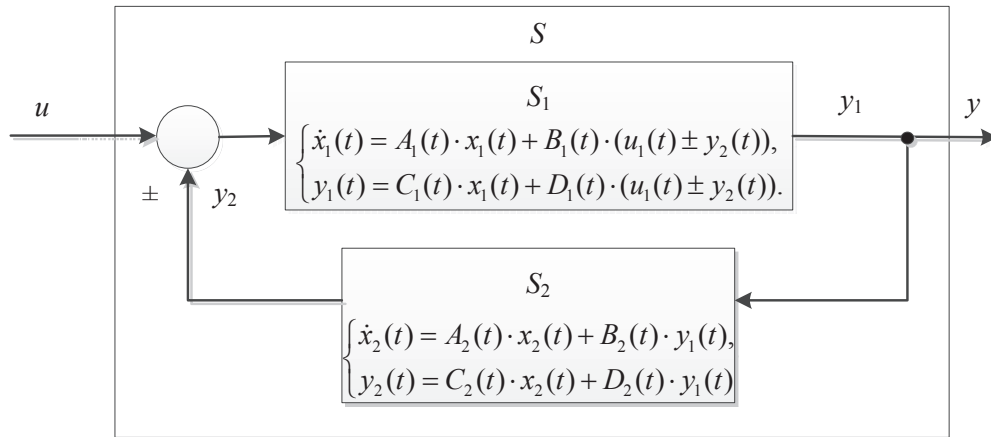


Рис. 1. Соединение с обратной связью

В литературе имеется описание для случаев соединения систем с обратной связью [6, 7], но оно не является полным, т. к. не учитывается прямая связь входа системы с его выходом. Иными словами, во втором уравнении системы (1) отсутствует второе слагаемое, что может привести к недостоверному результату. Для устранения данного недостатка система с обратной связью, структура которой показана на рис. 1, была представлена в виде системы уравнений (6):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1(t) \cdot x_1(t) + B_1(t) \cdot (u(t) \pm y_2(t)), \\ y_1(t) = C_1(t) \cdot x_1(t) + D_1(t) \cdot (u(t) \pm y_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = A_2(t) \cdot x_2(t) + B_2(t) \cdot y_1(t), \\ y_2(t) = C_2(t) \cdot x_2(t) + D_2(t) \cdot y_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

Пусть подсистемы S_1 и S_2 соединены обратной связью (размерности матриц $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$ подсистем S_1 и S_2 равны, соответственно, $n_i \times n_i$, $n_i \times m_i$, $l_i \times m_i$), т. е. выход подсистемы S_2 суммируется (или вычитается) с входом всей системы S и поступает на вход подсистемы S_1 . В качестве выхода системы S был использован выход подсистемы S_1 . При этом считалось, что $m_1=l_2$, $m_2=l_1$, $m=m_1$, $l=l_2$, $n=n_1+n_2$, $u_1(t)=u(t) \pm y_2(t)$, $u_2(t)=y_1(t)$.

Тогда после преобразований исходной системы к общему уравнению состояния (1) имеем:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) \pm \frac{B_1(t)D_2(t)C_1(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} & \dots \\ B_2(t)C_1(t) \pm \frac{B_2(t)D_1(t)D_2(t)C_1(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} & \dots \\ \dots \pm \frac{B_1(t)C_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} & \\ \dots A_2(t) \pm \frac{B_2(t)D_1(t)C_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} & \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \pm \frac{B_1(t)D_1(t)D_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} \\ B_2(t)D_1(t) \pm \frac{B_2(t)D_1(t)D_1(t)D_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \left[C_1(t) \pm \frac{D_1(t)D_2(t)C_1(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} \quad \pm \frac{D_1(t)C_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)} \right],$$

$$D(t) = D_1(t) \pm \frac{D_1(t)D_1(t)D_2(t)}{1 \mp D_1(t)D_2(t)}. \quad (7)$$

Моделирование ПИД регулятора

Неотъемлемой частью системы управления является регулятор. В системах управления уже долгое время находят применение линейные законы управления. Наиболее известен ПИД закон (пропорционально-интегрально-дифференциальный закон) регулирования.

Ввиду невозможности реализации идеального дифференцирования, в том числе с применением численных методов, ПИД регулятор моделировался в виде передаточной функции вида:

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{\left\{ (Kr \cdot Td \cdot N + Kr)s^2 + \left(Kr \cdot N + \frac{Kr}{Tu} \right)s + \frac{Kr \cdot N}{Tu} \right\}}{s^2 + Ns}, \quad (8)$$

где Kr , Ti , Td – параметры настройки пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулятора; N – порядок цифрового фильтра для обеспечения численного дифференцирования (обычно обратно пропорционален шагу расчета системы).

Далее, если представить функцию (8) в виде (1), то по формулам (3) можно получить матрицы A , B , C , D :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -Kr \cdot Td \cdot N^2 + \frac{Kr}{Tu} \\ Kr \cdot Td \cdot N^3 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = Kr \cdot Td \cdot N + Kr.$$

Следует отметить, что, зная методику представления ПИД регулятора, можно составить уравнения как для простых П и И законов регулирования, так и для ПИ, ПДД и других широко используемых линейных законов.

Алгоритм расчета системы

Рассмотрим САУ, представленную на рис. 2.

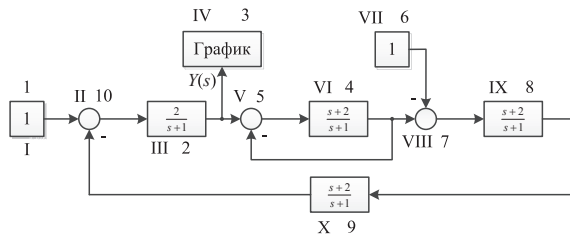


Рис. 2. Структура рассматриваемой системы: римскими цифрами показан порядок при последовательном расчете системы, арабскими – согласно предложенному алгоритму

Если производить расчет последовательно, т. е. от уставки [4] и до объекта управления, то результат будет некорректным, ввиду того, что мы изначально вводим смещение по времени, и как следствие, имеем неверный расчет.

Во избежание данной ошибки необходимо вести расчет так, чтобы не вводить смещение временной координаты. Для этого вводится понятие блока с «прямым выходом». Это означает, что выход звена напрямую зависит от его входов. К таким блокам относятся сумматоры, усилители и др. Предлагаемый алгоритм, показанный на рис. 3, предполагает на этапе инициализации последовательное нахождение звеньев с «прямым выходом». Затем проверяется, зависят ли входы первого найденного звена от выходов других аналогичных звеньев. Если зависимость найдена, то аналогично проверяется звено с «прямым выходом», от которого зависит первоначальное звено. Процесс останавливается, если либо удастся напрямую посчитать какой-либо блок, являющийся звеном с «прямым выходом», либо, как в приведенном выше примере, мы возвращаемся к выходу первоначального блока. Таким образом, если мы вернулись к первоначальному блоку, то прежде чем рассчитать

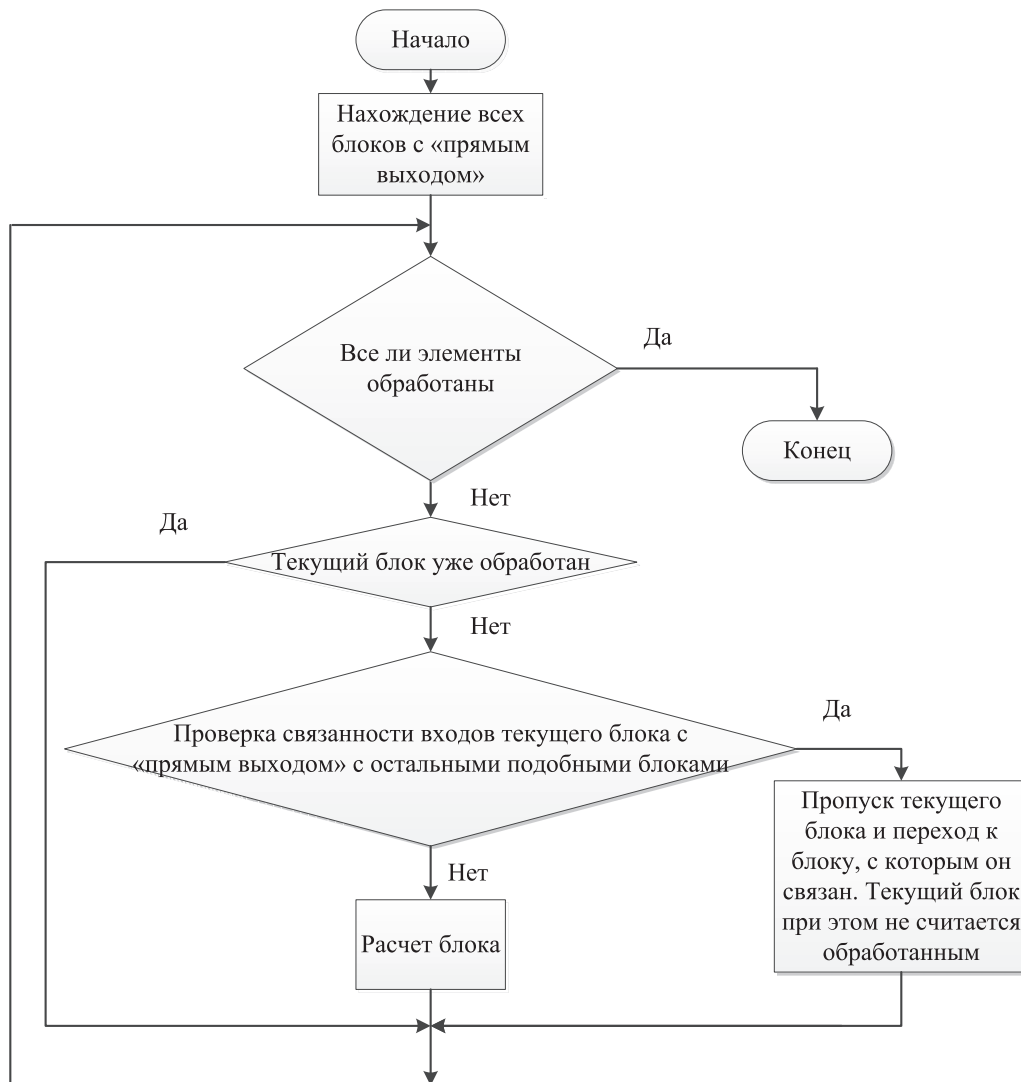


Рис. 3. Блок-схема алгоритма выбора порядка расчета звеньев системы

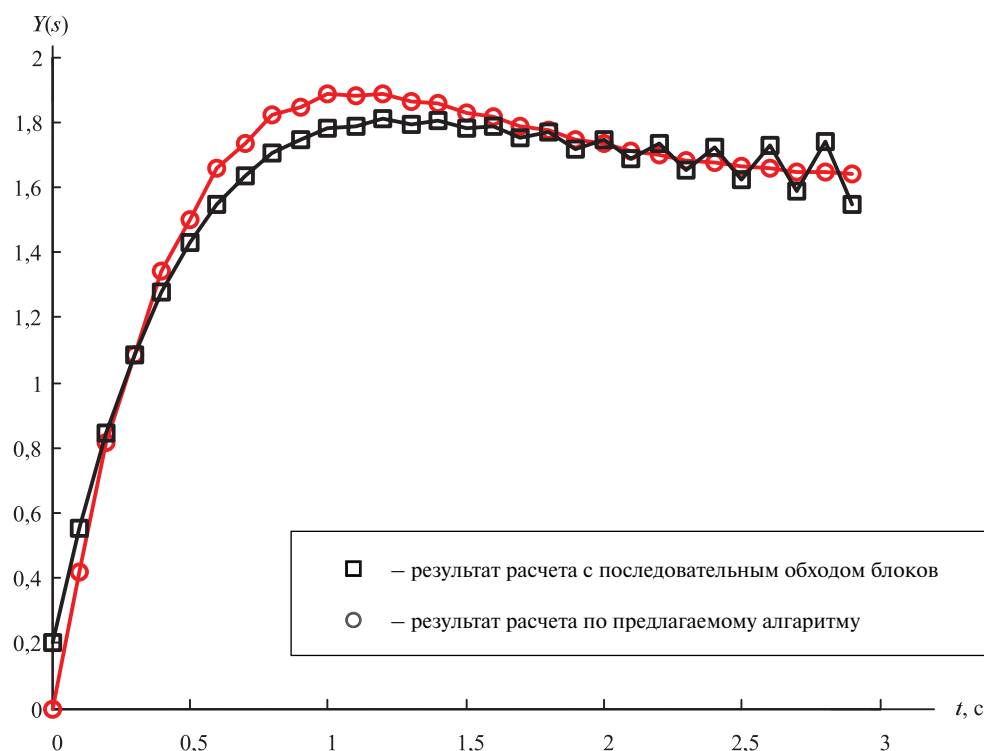


Рис. 4. Переходный процесс в динамической системе

его, мы находим значения выходов всех влияющих на него звеньев системы.

Для подтверждения корректности предлагаемого алгоритма порядка расчета системы, было проведено моделирование системы, изображенной на рис. 2. Результаты расчета, выводимые в блок «График», показаны на рис. 4.

Как следует из рис. 4, система, рассчитанная по предлагаемому алгоритму, не вносит смещение по времени и, тем самым, дает точный результат.

Заключение

В результате работы внесены коррективы в математический аппарат, позволяющий моделировать методом пространства состояний линейные динамические системы, представляемые в виде произвольных комбинаций динамических звеньев, описанных в статье. Составлен порядок описания и моделирования системы методом пространства состояний:

- каждое звено представить в виде дифференциального уравнения (2);
- получить системы уравнений пространства состояний для каждого звена, т. е. используя формулы (3), представить каждое звено в виде (1);
- произвести соединение подсистем: используя формулы (4), (5), (7), получить полное уравнение системы в пространстве состояний (в случае линейных систем управления, необязательно с нулевыми начальными условиями);
- в случае если количество оставшихся после преобразований блоков превышает один, необходимо воспользоваться алгоритмом, представленным на рис. 3, с целью выбора последовательности расчета звеньев системы.

Результаты работы планируется использовать в дальнейших исследованиях, посвященных автоматическому синтезу и анализу систем управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деруссо П.М., Рой Р.Дж., Клоуз Ч.М. Пространство состояний в теории управления: Для инженеров. — М.: Наука, 1970. — 620 с.
2. Шалаев Ю.Н. Моделирование краевой задачи нестационарных динамических систем // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312. — № 5. — С. 32–38.
3. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина — М.: Наука, 1985. — 294 с.
4. Дядик В.Ф., Байдали С.А., Криницын Н.С. Теория автоматического управления. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. — 196 с.
5. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 396 с.
6. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 2000. — 475 с.
7. Bakshi U.A., Bakshi M.V. Modern control theory. — Pune: Technical Publications Pune, 2008. — 386 p.

Поступила 22.12.2012 г.